ensai INSTITUT NATIONAL DE LA STATISTIQUE ET DES ÉTUDES ÉCONOMIQUES

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ANALYSE DE L'INFORMATION

concours d'élève titulaire de l'ENSAI
concours externe d'attaché de l'INSEE

Option A. – MATHÉMATIQUES

première composition de mathématiques

Durée : 4 heures

Notations – rappels

- On note $|E|$ le cardinal d'un ensemble fini E.
- $\mathbb{N}^*$ désigne l'ensemble des entiers naturels privés de 0. Si $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par $[n]$ un ensemble à n éléments que l'on identifiera à $\{1, 2, \ldots, n\}$ pour simplifier.
- S_n désigne l'ensemble des permutations de $\{1, 2, \ldots, n\}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$. On rappelle que $|S_n| = n!$.
- On note $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à *coefficients réels*.
- *Rappels :* On note $\cdot$ l'opération d'un groupe G sur un ensemble X. Si $x \in X$, l'orbite de x est l'ensemble, noté $G \cdot x$, égal à $\{g \cdot x, g \in G\}$.

  Les orbites de X forment une partition de X.

  Lorsque G est un sous-groupe de S_n, G opère sur $[n]$ par : $g \cdot k = g(k)$ $(g \in G, k \in [n])$.

Le but du problème est de passer en revue quelques techniques de dénombrement.

Les quatre parties sont indépendantes.

PARTIE I

Cardinaux d'ensembles finis

1. *Formule du produit.*

Soient $E_1, \ldots, E_n$ n ensembles finis $(n \in \mathbb{N}^*)$. On admet la formule :

$$|E_1 \times \ldots \times E_n| = |E_1| \times \ldots \times |E_n| \quad (*).$$

a. Déduire de (*) que le nombre d'applications de $[n]$ dans $[m]$ est $m^n (m \in \mathbb{N}^*)$. On appelle nombre de Stirling de deuxième espèce le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments en m classes non vides $((n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2, m \leqslant n)$.

On note S_n^m ce nombre.

b. Justifier que $m!\, S_n^m$ est le nombre de surjections de $[n]$ sur $[m]$.

c. Justifier l'égalité :

$$m^n = \sum_{k=1}^{m} C_m^k (k!\, S_n^k) \quad ((m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2, m \leqslant n).$$

d. Déduire de la question *c.* que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}),\ x^n = \sum_{k=1}^{n} S_n^k \times x(x-1) \times \ldots \times (x-k+1),\ (n \text{ fixé dans } \mathbb{N}^*).$$

2. *Formule de Poincaré.*

Soient $E_1, \ldots, E_n$ n ensembles finis $(n \in \mathbb{N}^*)$. On admet la formule :

$$|E_1 \cup \ldots \cup E_n| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \left(\sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n} |E_{i_1} \cap E_{i_2} \cap \ldots \cap E_{i_k}| \right) \quad (**).$$

a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note :

$$D_n = \{\sigma \in S_n / \sigma(k) \neq k, \forall k \in \{1, 2, \ldots, n\}\} \text{ et } E_k = \{\sigma \in S_n / \sigma(k) = k\} \ (k \in \{1, 2, \ldots, n\}).$$

À l'aide de la formule (**) précédente, montrer que :

$$|D_n| = n! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}\right).$$

b. Soit $(n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $n \geqslant m$. Montrer que le nombre $s(n, m)$ de surjections de $[n]$ sur $[m]$ s'écrit :

$$s(n, m) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k\ C_m^k (m-k)^n = m!\, S_n^m \text{ (d'après 1.b.)}.$$

PARTIE II

Formules d'inversions

1. *Formules binomiales inverses.*

a. Soient $P_0, P_1, \ldots, P_n$, $Q_0, Q_1, \ldots, Q_n$ $2n+2$ polynômes à coefficients réels vérifiant :

$$\text{degré}(P_k) = \text{degré}(Q_k) = k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n \ (n \in \mathbb{N}).$$

α. Montrer que $\{P_0, P_1, \ldots, P_n\}$ forme une base de $\mathbb{R}_n[X] = \{P \in \mathbb{R}[X] / \text{degré}(P) \leqslant n\}$.

On pose :

$$P_k = \sum_{i=0}^{k} \alpha_{k,i} Q_i \text{ et } Q_k = \sum_{i=0}^{k} \beta_{k,i} P_i,$$

les $\alpha_{k,i}$ et les $\beta_{k,i}$ étant des scalaires $(0 \leqslant i \leqslant k \leqslant n)$.

β. En déduire que, quels que soient les $2n+2$ nombres réels $a_0, a_1, \ldots, a_n, b_0, b_1, \ldots, b_n$, les relations :

$$(1) \quad a_k = \sum_{i=0}^{k} \alpha_{k,i}\, b_i$$

impliquent :

$$(2) \quad b_k = \sum_{i=0}^{k} \beta_{k,i}\, a_i \qquad (k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}).$$

On pourra chercher une interprétation matricielle des relations (1) et (2).

b. Application : d'après la formule du binôme :

$$(\forall x \in \mathbb{R}), \quad x^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (x-1)^k \quad \text{et} \quad (x-1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^{n-k} x^k.$$

Utiliser l'égalité de la question I.1.*c.* pour montrer que l'on retrouve la formule de la question I.2.*b.* donnant le nombre de surjections de $[n]$ sur $[m]$ $((n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2, m \leqslant n)$.

2. *Formule d'inversion de Möbius.*

On munit l'ensemble A des fonctions de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{Z}$ de la loi T définie par :

$$\forall (f, g) \in A^2, \ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad (f\,T\,g)(n) = \sum_{1 \leqslant d \leqslant n \,:\, d \text{ divise } n} f(d)\, g\left(\frac{n}{d}\right).$$

a. Montrer que T possède un élément neutre e.

On admettra par la suite que T est associative.

b. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. On note : $n = p_1^{\alpha_1} \times \ldots \times p_k^{\alpha_k}$ sa décomposition unique en produit de nombres premiers $p_1, \ldots, p_k$ ($k \in \mathbb{N}^*$; $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ étant des entiers positifs, non tous nuls).

L'entier $n \geqslant 2$ étant ainsi décomposé, on pose :

$$\mu(n) = (-1)^k \quad \text{et} \quad \mu(1) = 1,$$

ce qui définit ainsi une fonction μ de A (fonction de Möbius).

Montrer que :

$$z : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{Z}$$
$$n \longrightarrow 1,$$

est l'inverse de μ pour T.

c. Soient f et g deux éléments de A. Montrer l'équivalence :

$$\left\{ (\forall n \in \mathbb{N}^*), \ f(n) = \sum_{1 \leqslant d \leqslant n \,:\, d \text{ divise } n} g(d) \right\} \Leftrightarrow \left\{ (\forall n \in \mathbb{N}^*), \ g(n) = \sum_{1 \leqslant d \leqslant n \,:\, d \text{ divise } n} \mu(d) \times f\left(\frac{n}{d}\right) \right\}$$

(remarquer que f s'exprime simplement à l'aide de z et g).

d. Application : un alphabet est un ensemble de m symboles distincts $\{a_1, \ldots, a_m\}$ ($m \in \mathbb{N}^*$). Un mot de longueur n est une application de $[n]$ dans $\{a_1, \ldots, a_m\}$ ($m \in \mathbb{N}^*$). Si deux mots φ et φ' de longueur n vérifient :

$$\varphi'(i) = \varphi(i + p) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

on dit qu'ils sont équivalents ou qu'ils constituent le même mot circulaire (les sommes étant modulo n).

Si un mot φ de longueur n est tel que :

$$\exists\, p \in \{1, 2, \ldots n\} : \qquad \varphi(i + p) = \varphi(i) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

on dit que p est période de φ. La plus petite période est appelée période primitive de φ. Par exemple, le mot *abcabc* est de période primitive 3.

On admettra qu'une période p est nécessairement un diviseur de n.

Soit M (p) le nombre de mots circulaires de longueur n et de période primitive p.

Montrer que le nombre total de mots circulaires est :

$$\sum_{1 \leqslant p \leqslant n \,:\, p \text{ divise } n} \mathrm{M}(p) = \sum_{\substack{1 \leqslant p \leqslant n \\ p \text{ divise } n}} \frac{1}{p} \left(\sum_{1 \leqslant q \leqslant p \,:\, q \text{ divise } p} \mu\left(\frac{p}{q}\right) m^q \right).$$

PARTIE III

Utilisation de fonctions génératrices

Exemple 1 :

En reprenant l'expression de S_n^m trouvée dans la partie I, question 2.*b.*, montrer que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} S_n^m \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{m!} (e^x - 1)^m \qquad (x \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{N}^*),$$

cette série ayant un rayon de convergence infini (on fait la convention que $S_n^m = 0$ si $n < m$).

Calculer S_n^2 ($n \in \mathbb{N}$).

Exemple 2 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note I_n le nombre d'involutions de $[n]$, c'est-à-dire le nombre d'applications f de $[n]$ dans lui-même vérifiant : $f \circ f = \mathrm{Id}$ (identité de S_n).

1. Justifier la formule de récurrence : $I_n = I_{n-1} + (n - 1)\, I_{n-2}$ ($n \geqslant 3$).

2. Soit $\mathcal{S}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{I_n}{n!} x^n$ ($x \in \mathbb{R}$). Montrer que le rayon de convergence de $\mathcal{S}$ est au moins égal à 1 et que l'on a l'égalité :

$$\forall\, x \in]-1, +1[, \qquad \mathcal{S}'(x) = (1 + x)(\mathcal{S}(x) + 1) \qquad \text{(on fait la convention que } I_0 = 0).$$

3. En déduire une expression de $\mathcal{S}(x)$ à l'aide d'une exponentielle.

4. Montrer l'égalité :

$$I_n = \sum_{\substack{p,\, k \text{ entiers} \geqslant 0 \\ p + 2k = n}} \frac{n!}{k!\, p!\, 2^k} \qquad (n \in \mathbb{N}^*).$$

PARTIE IV

Soit G un sous-groupe du groupe S_n (permutations de $[n]$, $n \geqslant 1$).

G opère sur $[n]$ par : $(\forall\, g \in G, \forall\, k \in [n])$, $g \cdot k = g(k)$.

On note $G_k = \{g \in G / g(k) = k\}$ $\quad (k = 1, 2, \ldots, n)$.

On note $\mathcal{R}_k$ la relation d'équivalence définie sur G par :

$$\forall\, (g, h) \in G^2, \quad g\, \mathcal{R}_k\, h \Leftrightarrow gh^{-1} \in G_k\,.$$

QUESTION PRÉLIMINAIRE : montrer que G_n est un sous-groupe de G et que $\mathcal{R}_k$ définit une relation d'équivalence sur G $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

On note G/G_k l'ensemble quotient correspondant.

1. Montrer les égalités : $\quad |G| = |G/G_k| \times |G_k| \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$.

2. Montrer que :

$$\forall\, (k, i) \in \{1, 2, \ldots, n\}^2, \forall\, (g, h) \in G^2, \quad (k = g(i) = h(i) \Rightarrow G_k \cdot g = G_k \cdot h).$$

3. On désigne par O_k l'orbite de k sous l'action de G $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

En considérant l'application :

$$\varphi : O_k \longrightarrow G/G_k$$
$$i \longrightarrow G_k \cdot g_i = \{g g_i \,/\, g \in G_k\}$$

où g_i est une permutation de G qui vérifie $g_i(i) = k$, montrer que :

$$|G_k| \times |O_k| = |G|\,.$$

4. Soit $\lambda_1(g)$ le nombre de points fixes d'une permutation g de G (c'est-à-dire le nombre d'entiers $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tels que $g(k) = k$). Soit $\mathcal{C}_G$ l'ensemble des orbites de G.

Justifier les égalités :

$$\sum_{g \in G} \lambda_1(g) = \sum_{k=1}^{n} |G_k| = \sum_{O \in \mathcal{C}_G} \left(\sum_{k \in O} |G_k| \right).$$

En déduire la formule :

$$(*) \qquad \sum_{g \in G} \lambda_1(g) = |G| \times |\mathcal{C}_G| \qquad \text{(utiliser la question 3. précédente).}$$

5. Soit $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$ un ensemble à m éléments $(m \geqslant 1)$. Une application φ de $[n]$ dans A est appelée coloration $(n \in \mathbb{N}^*)$. On dit que deux colorations φ_1 et φ_2 de $[n]$ dans A appartiennent au même schéma s'il existe $g \in S_n$ tel que $\varphi_1 \circ g = \varphi_2$.

Soit G un sous-groupe de S_n. Si $g \in G$, désignons par $\lambda_i(g)$ le nombre de cycles de longueur i de la permutation g $(i \in \{1, 2, \ldots, n\})$.

a. Si Φ désigne l'ensemble des colorations, montrer que l'application :

$$\overline{g} : \Phi \longrightarrow \Phi$$
$$\varphi \longrightarrow \varphi \circ g \text{ est bijective.}$$

On désigne par $\overline{S}$ les permutations de Φ.

b. Montrer que l'application :

$$\psi : G \longrightarrow \overline{S}$$
$$g \longrightarrow \overline{g} \text{ est injective.}$$

Montrer que $\overline{G} = \{\overline{g} \,/\, g \in G\}$ est un sous-groupe de $\overline{S}$ et que $|\overline{G}| = |G|$.

c. Montrer que le nombre de schémas est le nombre d'orbites de $\overline{G}$ lorsque celui-ci opère sur Φ par :

$$(\forall\, \bar{g} \in \overline{G}),\ (\forall\, \varphi \in \Phi), \qquad \bar{g} \cdot \varphi = \bar{g}(\varphi)$$

et donc que l'on a, d'après la formule (*) de la question 4,

$$|\mathscr{C}_{\overline{G}}| = \frac{1}{|\overline{G}|} \sum_{\bar{g} \in \overline{G}} \nu(\bar{g}),$$

où $\nu(\bar{g})$ est le nombre de colorations φ telles que $\varphi \circ g = \varphi$.

d. En déduire que le nombre de schémas est $P(G; \underbrace{m, m, \ldots, m}_{n \text{ fois}})$ où :

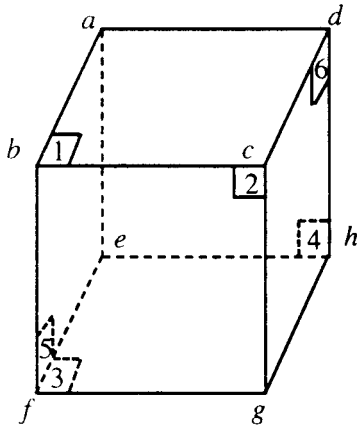
$$P(G; x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} x_1^{\lambda_1(g)} \times x_2^{\lambda_2(g)} \times \ldots \times x_n^{\lambda_n(g)} \quad (**)$$

$((x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n)$.

6. *Application :* Expliciter la formule (**) ci-dessus dans le cas d'un cube ($n = 6$).

Quel est le nombre de schémas du cube lorsque l'on colorie celui-ci avec deux couleurs ($m = 2$) ?

On admettra que G est le groupe de toutes les rotations du cube, dont la liste est jointe ci-dessous.



Deux cubes colorés sont considérés comme équivalents si on peut les amener à coïncider par une rotation (les listes entre crochets indiquent les permutations des faces) :

autour de l'axe des faces *abcd* - *efgh* : [2645] ; [24] [65] ; [2546]

autour de l'axe des faces *bcfg* - *adhe* : [1536] ; [13] [56] ; [1635]

autour de l'axe des faces *abfe* - *dcgh* : [1234] ; [13] [24] ; [1432]

autour de l'axe *ag* : [145] [632] ; [154] [623]

autour de l'axe *bh* : [152] [643] ; [125] [634]

autour de l'axe *ce* : [126] [345] ; [162] [354]

autour de l'axe *df* : [164] [352] ; [146] [325]

autour de l'axe des arêtes *ab* - *gh* : [15] [63] [24]

autour de l'axe des arêtes *bc* - *eh* : [12] [43] [56]

autour de l'axe des arêtes *cd* - *ef* : [16] [35] [24]

autour de l'axe des arêtes *ad* - *fg* : [14] [23] [56]

autour de l'axe des arêtes *bf* - *dh* : [25] [64] [13]

autour de l'axe des arêtes *cg* - *ae* : [26] [54] [13], plus l'identité, soit 24 rotations.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail